Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 9

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

1.) Beschreiben Sie die Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ durch eine Matrix bezüglich der kanonischen Basis.

Wenn

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

die Ebene ist, dann steht

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-&1\\2&-&0\\1&-&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

senkrecht auf dieser Ebene.

Gegeben sei nun ein Punkt $p=(x,y,z)^T$, der der Ebene gespiegelt werden soll, und $p'=(x',y',z')^T$ seine Spiegelung. Wenn

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

die Position des Punktes beschreibt, dann beschreibt

$$(*)\quad a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-c\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

die Position der Spiegelung.

Dazu müssen a, b und c durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt werden:

$$\left(\begin{array}{rrr|c}1&2&-1&x\\1&1&2&y\\1&0&-1&z\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&2&-1&x\\0&-1&3&y-x\\0&-2&0&z-x\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&0&-1&x+z-x\\0&-1&3&y-x\\0&1&0&\frac{1}{2}(x-z)\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&0&-1&z\\0&0&3&y-x+\frac{1}{2}(x-z)\\0&1&0&\frac{1}{2}(x-z)\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x-z) \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & z - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x-z) \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \end{array}\right)$$

Also ist

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z \\ b &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ c &= -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}z \end{aligned}$$

Setzt man dies in $(*)$ ein:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z + x - z - \left[\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right] &= x' \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z - \left[\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{6}z\right] &= y' \\ -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z + 0 - \left[\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right] &= z' \end{aligned}$$

und formt um:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z &= x' \\ 0x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z &= y' \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z &= z' \end{aligned}$$

Dann ist die Spiegelung durch folgende Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2.) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in I\!R$ beliebig und $f : I\!R^3 \to I\!R$ die Linearform definiert durch $f(e_i) = \alpha_i,\ i = 1,2,3$. Beschreiben Sie f als Linearkombination bezüglich der zu (e_1, e_2, e_3) und bezüglich der zu $(0,1,1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (1,0,1)^T$ dualen Basen.

3.) Sei $A := \begin{pmatrix} 13 & -5 & -5 \\ -5 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, I\!R)$**.**

3a.) Berechnen Sie $\det A$**.**

$$
\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 13 & -5 & -5 \\ -5 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\
&= 13 \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 13 \cdot 32 + 5 \cdot (-20) - 5 \cdot 20 \\
&= 416 - 200 \\
&= 216
\end{aligned}
$$

3b.) Ist A positiv definit?

Eine Matrix A ist positiv definit, wenn sich eine Matrix

$$
T := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}
$$

finden läßt, so daß

$$
T^T T = A
$$

gilt. Daraus errechnet sich folgendes Gleichunggsystem

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= 13 \\
d^2 + e^2 + f^2 &= 6 \\
g^2 + h^2 + i^2 &= 6 \\
ad + be + cf &= -5 \\
dg + eh + fi &= 2
\end{aligned}
$$

Dafür läßt sich ein C-Programm schreiben, welches alle Werte durchtestet (s.u.). Das Ergebnis ist: Ja, A ist positiv definit, da sich eine Matrix

$$
T := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}
$$

finden läßt, so daß

$$T^T T \;=\; \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -5 \\ -5 & 6 & 2 \\ -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = A$$

gilt.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

void main(void)
{
  int a,b,c,d,e,f,g,h,i;
  int n1,n2,n3;
  for (a=-10;a<10;a++) for (b=-10;b<10;b++) for (c=-10;c<10;c++)
  {
    if (a*a+b*b+c*c==13)
    {
      for (d=-10;d<10;d++) for (e=-10;e<10;e++) for (f=-10;f<10;f++)
        {
          if (d*d+e*e+f*f==6)
          {
            for (g=-10;g<10;g++) for (h=-10;h<10;h++) for (i=-10;i<10;i++)
            {
                n1=g*g+h*h+i*i;
                n2=a*d+b*e+c*f;
                n3=d*g+e*h+f*i;
                if (n1==6 && n2==-5 && n3==2)
                {
                   printf("%3i %3i %3i\n",a,b,c);
                   printf("%3i %3i %3i\n",d,e,f);
                   printf("%3i %3i %3i\n",g,h,i);
                   printf("-----------\n");
                }
            }
          }
       }
    }
  }
}
```

3c.) Sei s_A die durch A definierte symetrische Bilinearform, und $F \in End(\mathbb{R}^3)$. Wie kann man den zu F bezüglich s_A adjungierten Operator bescheiben?

$s_A(v, w) := v^T A w.$

Sei $F \in End(I\!R^3)$. Sucht man eine Funktion $F^{ad} \in End(I\!R^3)$, für die

$$s_A(F(v), w) = s_A(v, F^{ad}(w))$$

gilt, so bedeutet dies

$$(Fv)^T Aw = v^T A(F^{ad}w) \quad \Leftrightarrow \quad v^T F^T Aw = v^T AF^{ad}w \Leftrightarrow v^T(F^T A)w = v^T(AF^{ad})w$$

Also muß

$$F^T A = AF^{ad}$$

gelten. Also auch

$$A^{-1}F^T A = A^{-1}AF^{ad} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}F^T A = F^{ad}$$

Damit läßt sich F^{ad} aus $A^{-1}F^T A$ berechnen.

3d.) Wann ist F selbstadjungiert?

Wenn

$$A^{-1}F^T A = F$$

gilt.

4.) Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $s: V \times V \to K$ eine Bilinearform. Zeigen Sie: 1. Es gibt eine symmetrische Bilinearform s_+ und eine schiefsymetrische Bilinearform s_- mit $s = s_+ + s_-$.

Sei A die zu s gehörige Matrix, A_- die zu s_-, A_+ die zu s_+ gehörige.

Damit ist

$$\begin{aligned} s(u,v) &= u^T Av \\ s_-(u,v) &= u^T A_- v \\ s_+(u,v) &= u^T A_+ v \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} s_+(u,v) + s_-(u,v) &= u^T A_- v + u^T A_+ v \\ &= u^T(A_- v + A_+ v) \\ &= u^T(A_- + A_+)v = u^T Av = s(u,v) \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$s_-(u,v) = -s_-(v,u)$$

und damit

$$\begin{aligned}
s(u,v) &= s_+(u,v) - s_-(v,u) \\
&= s_+(v,u) - s_-(v,u) \\
&= v^T A_+ u - v^T A_- u \\
&= v^T (A_+ u - A_- u) \\
&= v^T (A_+ - A_-) u
\end{aligned}$$