Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 7

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

Denk dran: Abschreiber hören zuhause auch Britney Spears.

1.) Bestimmen die Jordansche Normalform der folgenden Matrix und eine Basis bezüglich der sie diese Jordansche Normalform annimmt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.) Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$ Vektorraum und F ein Endomorphismus von V, der der Gleichung $F^3 = F$ genügt. Zeigen Sie, dass F diagonalisierbar ist.

3.) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist folgende Matrix diagonalisierbar? $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2a & b-\lambda & a \\ 10 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ \chi_A &= (-3-\lambda)(b-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = b,\ \lambda_3 = 2$.

$\lambda_1 = 3$

$(A - \lambda_1)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & b+3 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2ax + (b+3)y + az &= 0 \\ 10x + 5z &= 0 \end{aligned}$$

also ist $2x = -z$. Mit $x := 1$ ist $z := -2$:

$$2a + (b+3)y - 2a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b+3)y = 0$$

also ist $y = 0$ für $b \neq -3$. Damit sind die Eigenvektoren der Matrix für den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ Vielfache von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = b$

$(A - \lambda_2)v = 0$

$$\begin{pmatrix} -3-b & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 2-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (-3-b)x & & & & & = & 0 \\ 2ax & + & 2az & & & = & 0 \\ 10x & & & + & (2-b)z & = & 0 \end{array}$$

Für $b \neq -3$ ist also $x = 0$, damit ist für $a \neq 0$ auch $z = 0$. Damit ist nur y beliebig, also sind die Eigenvektoren Vielfache von

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 2$

$(A - \lambda_3)v = 0$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & b-2 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 10x = 0 &\quad\Rightarrow\quad x = 0 \\ -5 = 0 &\quad\Rightarrow\quad x = 0 \\ 2ax + (b-2)y + az = 0 &\quad\Rightarrow\quad (b-2)y = -az \end{aligned}$$

also sind die Eigenvektoren Vielfache von

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ b-2 \end{pmatrix}$$

Also laßen sich für $b \neq -3$ und $a \neq 0$ Eigenvektoren finden. Normalisiert man v_1, v_2 und v_3, so ergibt sich:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,-2)^T}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^T$$
$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(0,1,0)^T}{\|v_2\|} = (0,1,0)^T$$
$$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(0,-a,b-2)^T}{\|v_3\|} = \frac{(0,-a,b-2)^T}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}$$

Also ist die Matrix $P = (w_1, w_2, w_3)$:

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{b-2}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}} \end{pmatrix}$$

Die Inverse dazu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{b-2}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+(b-2)^2} & -a & 0 & \sqrt{a^2+(b-2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 2\sqrt{a^2+(b-2)^2} & 0 & \sqrt{a^2+(b-2)^2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+(b-2)^2} & -a & 0 & \sqrt{a^2+(b-2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} & 0 & \frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+(b-2)^2} & 0 & 2a\frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} & \sqrt{a^2+(b-2)^2} & a\frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} & 0 & \frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a}{b-2} & 1 & \frac{a}{b-2} \\ 0 & 0 & 1 & 2\frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} & 0 & \frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} \end{array}\right)$$

ist also

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ \frac{2a}{b-2} & 1 & \frac{a}{b-2} \\ 2\frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} & 0 & \frac{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}{b-2} \end{pmatrix}$$

und nur definiert, wenn $b \neq 2$ gilt. Also läßt die Matrix für $b \neq 3$, $b \neq 2$ und $a \neq 0$ diagonalisieren.

4.) Berechnen Sie die Eigenwerte der Potenzen von $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ Finden Sie eine Matrix S, für die $S^{-1}CS$ Diagonalgestalt hat. Wie kann damit die Potenzen von C berechnen?

Behauptung: Die Eigenwerte der Potenzen von C sind die Potenzen der Eigenwerte von C.

Beweis: Sei C^n die n-te Potenz der Matrix C. Da die Eigenwerte die Nullstellen des Polynoms

$$\det(C - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(C) - \det(\lambda E) = 0$$

sind, gilt

$$\det(C) \quad = \quad \det(\lambda E)$$

Potenziert man beide Seiten:

$$\det(C)^n \quad = \quad \det(\lambda E)^n$$

so folgt wegen $\det(A \cdot A) = \det(A)\det(A)$ für alle Matrizen $A \in M(n \times n, K)$

$$\begin{aligned} \det(C^n) = \det([\lambda E]^n) \quad &\Leftrightarrow \quad \det(C^n) = \det(\lambda^n E) \\ &\Leftrightarrow \quad \det(C^n) - \det(\lambda^n E) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det(C^n - \lambda^n E) = 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

Die Eigenwerte von C sind

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda E) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{(-5)^2}{4} - (-2)} \quad &\Leftrightarrow \quad \Lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 2} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{8}{4}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{33}{4}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 2,5 + \frac{\sqrt{33}}{2} \quad \lambda_2 = 2,5 - \frac{\sqrt{33}}{2}$$

Somit sind die Eigenwerte der Potenzen von C Potenzen von $= 2,5 + \frac{\sqrt{33}}{2}$ und $2,5 - \frac{\sqrt{33}}{2}$.

$\lambda_1 = 2,5 + \frac{\sqrt{33}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2,5 - \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - 2,5 - \frac{\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} -\left(1,5 + \frac{\sqrt{33}}{2}\right) x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & \left(1,5 - \frac{\sqrt{33}}{2}\right) y & = & 0 \end{array}$$

also ist

$$\begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{2}\left(1,5 + \frac{\sqrt{33}}{2}\right) x \\ x & = & \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{33}}{2} - 1,5\right) y \end{array}$$

und damit sind die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert Vielfache von

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{33}}{4} \\ \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{33}}{2} - 1,5\right) \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2,5 - \frac{\sqrt{33}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2,5 + \frac{\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & 4 - 2,5 + \frac{\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} -\left(1,5 - \frac{\sqrt{33}}{2}\right) x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & \left(1,5 + \frac{\sqrt{33}}{2}\right) y & = & 0 \end{array}$$

also ist

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\left(1,5 - \frac{\sqrt{33}}{2}\right)x \\
x &= -\frac{1}{3}\left(1,5 + \frac{\sqrt{33}}{2}\right)y
\end{aligned}$$

und damit sind die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert Vielfache von

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{33}}{4} \\ -\frac{1}{3}\left(1,5 + \frac{\sqrt{33}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

also ist die Matrix $P = (v_1/\|v_1\|, v_2/\|v_2\|)$. Weil da vier Wurzeln untereinanderstehen sind wir jetzt sicher, dass wir uns irgendwo verrechnet haben müssen.