Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 7

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

Denk dran: Abschreiber hören zuhause auch Britney Spears.

1.) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu A.

Eigenwerte

$$A \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

also berechnen sich die Eigenwerte aus

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda E) \quad & \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad 0 = (1-\lambda)^2 - 1 \\ & \Leftrightarrow \quad 0 = \lambda^2 - 2\lambda \\ & \Leftrightarrow \quad 0 = \lambda(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$.

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad 0$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + iy &= 0 \\ -ix + y &= 0 \end{aligned}$$

also muß $x = -iy$ gelten, damit sind die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_1 Vielfache von

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad 0$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x + iy &= 0 \\ -ix - y &= 0 \end{aligned}$$

also muß $x = iy$ gelten, damit sind die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_2 Vielfache von

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

2.) Berechnen Sie $B \in U(2)$, so dass mit der Matrix A aus Aufgabe 1 $\overline{B}^T AB$ Diagonalgestalt hat.

Sei die Basis B_1:

$$B_1 := \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$$

Dann ist $F(v_1)$ und $F(v_2)$:

$$\begin{aligned} F(v_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 + 0v_2 \\ F(v_2) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2i \end{pmatrix} = 0v_1 + 2v_2 \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix

$$M_{B_1}^{B_1}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Normalisiert man B_1:

$$\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{|1|^2 + |i^2|} = \sqrt{2} \\ \|v_2\| &= \sqrt{|1|^2 + |(-i)^2|} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ \overline{B}^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \overline{B}^T AB &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat Diagonalgestalt, also ist

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3.) Sei f ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen unitären Vektorraumes. Wenn $\langle f(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in V$ gilt, dann gilt $f = 0$.

Behauptung:
Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum über K, f ein Endomorphismus und $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt des Vektorraumes. Wenn $\langle f(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in V$ gilt, dann gilt $f = 0$

Beweis durch Widerspruch:
Angenommen $\langle f(x), x\rangle = 0$, aber $f(x) \neq 0$. f und $\langle , \rangle$ sind beides lineare Abbildungen. Dann folgt daraus mit einem $\lambda \in K$ für alle $x \in V$:

$$\langle f(\lambda x), x\rangle = \langle \lambda f(x), x\rangle = \lambda\langle f(x), x\rangle = \lambda 0 = 0 = \langle f(x), x\rangle$$

Also muß $f(\lambda x) = \lambda f(x) = f(x)$ gelten.

$\lightning$

Wegen $f(x) = f(\lambda x)$ muß f also eine konstante Funktion sein, wegen $f(x) = \lambda f(x)$ gilt also $f(x) = 0$ für alle $x \in V$.

q.e.d.

4.) Sei $A \in M(n \times n, K)$ und $\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ sein charakteristisches Polynom. Zeigen Sie: Ist $a_0 \neq 0$, dann ist A invertierbar. In diesem Fall gilt: $\chi_{A^{-1}}(X) = (-1)^n(\det A)^{-1}(1 + a_{n-1}X^1 + \ldots + a_0X^n)$

Behauptung: Zeigen Sie: Ist a_0 des charakteristischen Polynomes ungleich 0, dann ist A invertierbar.

Beweis:
Die Berechnung des charakteristischen Polynoms ist definiert als

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XE_n - A) \\ \chi_A(X) &= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \chi_A(0) &= \det(-A) = (-1)^n \det A \\ \chi_A(0) &= 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + \ldots + a_0 = a_0 \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die Determinante der Matrix A gleich $(-1)^n a_0$ ist. Eine Matrix, deren Determinante ungleich 0 ist, ist invertierbar. Damit ist eine Matrix invertierbar, wenn das a_0 ihres charakteristischen Polynomes ungleich 0 ist.

q.e.d.

Behauptung: In diesem Fall gilt: $\chi_{A^{-1}}(X) = (-1)^n (\det A)^{-1}(1 + a_{n-1}X^1 + \ldots + a_0 X^n)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\chi_{A^{-1}}(X) &= \det(XE_n - A^{-1}) \\
&= \det(XA^{-1}A - A^{-1}) \\
&= \det(A^{-1} \cdot [XA - E]) \\
&= \det(A^{-1}) \cdot \det(XA - E) \\
&= \det(A^{-1}) \cdot \det\left(-X\left[-A + X^{-1}E\right]\right) \\
&= \det(A^{-1}) \cdot \det\left(-X\left[X^{-1}E - A\right]\right) \\
&= \det(A^{-1}) \cdot (-X)^n \det\left(X^{-1}E - A\right) \\
&= (-1)^n \det(A^{-1}) X^n \det\left(X^{-1}E - A\right) \\
&= (-1)^n \det(A)^{-1} X^n \det\left(X^{-1}E - A\right)
\end{aligned}$$

Wie wir wissen gilt

$$\det(XE - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$$

also gilt

$$\det(X^{-1}E - A) = X^{-n} + a_{n-1}X^{-n+1} + \ldots + a_0$$

und

$$\begin{aligned}
X^n \det(X^{-1}E - A) &= X^n X^{-n} + a_{n-1}X^n X^{-n+1} + \ldots + X^n a_0 \\
&= 1 + a_{n-1}X^1 + \ldots + a_0 X^n
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$\chi_{A^{-1}}(X) = (-1)^n (\det A)^{-1}(1 + a_{n-1}X^1 + \ldots + a_0 X^n)$$

q.e.d.