Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 6

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

Denk dran: Abschreiber sind dooooof.

1.) Sei B eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^T B^T By$ symetrisch ist. Sie ist genau dann positiv definit, wenn B invertierbar ist.

B ist invertierbar, somit gilt $x^T B^T = (Bx)^T$ und $Bx \in \mathbb{R}^n$.

Symetrisch

$$\begin{aligned} (x,y) \mapsto x^T B^T By &= (Bx)^T By \\ (x,y)^T \mapsto ((Bx)^T By)^T &= (By)^T Bx \\ &= y^T B^T Bx = (y,x) \end{aligned}$$

Positiv definit

$$\begin{aligned} (x,x) &= x^T B^T Bx \\ &= (Bx)^T Bx \\ &= \langle Bx, Bx \rangle \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist positiv definit, somit auch die Bilinarform $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^T B^T By$.

2.) Zeigen Sie, dass durch $\beta(A, B) := Spur(A, B)\ \forall A, B \in M(n \times n, K)$ eine symetrische nichtausgeartete Bilinearform definiert wird. Geben Sie für $n \geqslant 2$ eine Matrix $A \neq 0$ mit $\beta(A, A) = 0$ an.

Seien A, B wie folgt definiert:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass β symetrisch ist

Auf der Hauptdiagonale sehen bei der Matrix AB in der i-ten Zeile die Einträge wie folgt aus:

$$a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \ldots + a_{in}b_{ni} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$

Und die Spur berechnet sich damit aus

$$Spur(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \quad (*)$$

Auf der Hauptdiagonale sehen bei der Matrix BA in der i-ten Zeile die Einträge wie folgt aus:

$$b_{i1}a_{1i} + b_{i2}a_{2i} + \ldots + b_{in}a_{ni} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$$

Und die Spur berechnet sich damit aus

$$Spur(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$$

Dies ist gleich:

$$Spur(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_{ij}$$

Permutiert man die Summanden, so hat man:

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$

Somit gilt $Spur(AB) = Spur(BA)$, also auch $\beta(A,B) = \beta(B,A)$.

Zeigen Sie, daß $\beta(A,B)$ eine nicht ausgeartete Bilinearform ist

$\beta(A,B)$ ist ein Homomorphismus, da

$$\begin{aligned}
\beta(A+C, B+D) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+c_{ij})(b_{ji}+d_{ji}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji} + a_{ij}d_{ji} + b_{ji}c_{ij} + c_{ij}d_{ji}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_{ji} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}c_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}d_{ji} \\
&= \beta(A,B) + \beta(B,C) + \beta(A,D) + \beta(C,D)
\end{aligned}$$

Geben Sie für $n \geqslant 2$ eine Matrix $A \neq 0$ mit $\beta(A,A) = 0$ an.

Behauptung

Für jedes $n \geqslant 2$ läßt sich eine Matrix mit den gewünschten Eigenschaften finden.

Beweis

Per Induktion über n

Induktionsanfang: $n := 2$

Für $n = 2$ hat die folgende Matrix die gewünschten Eigenschaften:

$$M(2) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da

$$\begin{aligned} \beta(A, A) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji} \\ &= (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + (-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \\ &= (1 - 1) + (-1 + 1) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

In einer Matrix, die die folgende Form hat gelten die geforderten Eigenschaften:

$$M(n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

da

$$\begin{aligned} \beta(A, A) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji} \\ &= (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 0 + \cdots + 0 + (-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + 0 + \cdots + 0 \\ &= (1 - 1) + 0 + (-1 + 1) + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

3.) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume des durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gegebenen Endomorphismus $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bestimme zuerst die Eigenwerte

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda E_n) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2-1]-(1-\lambda-1)+(1-1+\lambda) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)+2\lambda \\
&= \lambda^2-2\lambda-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda \\
&= -\lambda^3+3\lambda^2 = \lambda^2(-\lambda+3)
\end{aligned}$$

Damit ist das charakteristische Polynom $-\lambda^3+3\lambda^2$.
Die Eigenwerte sind $\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=3$.

Der erste Eigenraum zum Eigenwert 0 berechnet sich somit aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt auf die Gleichung

$$x+y+z=0 \quad\Leftrightarrow\quad z=-x-y$$

Mit $x:=0,\ y:=1$ bzw $x:=1,\ y:=0$ führt das zu den Eigenvektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der erste Eigenraum ist somit $I\!R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + I\!R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Der zweite Eigenraum zum Eigenwert 3 berechnet sich somit aus

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
-2x+y+z=0 &\quad\Leftrightarrow\quad y+z=2x \\
x-2y+z=0 &\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-2y+z=0 \Leftrightarrow -1,5y+1,5z=0 \Leftrightarrow z=y \\
x+y-2z=0 &\quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+y-2z=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z+z-2z=0
\end{aligned}$$

Mit $z := 1$ führt das auf den Eigenvektor

$$v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der zweite Eigenraum ist somit $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.) Sei $H(n)$ der reelle Vektorraum der hermiteschen $(n \times n)$-Matrizen mit Spur 0.

Für hermitesche Matrizen gilt $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle,\ \forall v, w \in \mathbb{R}^n$. Somit muß für eine Matrix A gelten:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

also (mit $i, j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_2w_1 + \ldots + a_{1n}v_nw_1 + \ldots + a_{ij}v_jw_i + \ldots + a_{nn}v_nw_n =$$
$$a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + \ldots + a_{ji}v_jw_i + \ldots + a_{nn}v_nw_n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_jw_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_iw_j$$

Damit ist eine Matrix $(a)_{i,j} \in M(n \times n, K)$ hermitesch, wenn für alle Ihre Elemente gilt:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (**)$$

Also $A^T = A$ gilt.

a.) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} H(n)$.

In der ersten Zeile der Matrix gibt es n freie Paramter, in der zweiten $n-1$, in der dritten $n-2$, $\ldots$, in der vorletzten zwei und in der letzten keinen, da die Spur 0 ergeben muss. Damit ist die Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} H(n) = \frac{1}{2}n(n+1) - 1$$

b.) Sind $A, B \in H(n)$, dann auch $i(AB - BA)$

Da für $A^T = A$ und $B^T = B$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} i(AB - BA) &= i(A^T B^T - BA) \\ &= i((BA)^T - BA) \\ &= i(BA - BA) \\ &= i0 = 0 \end{aligned}$$

Bei der Nullmatrix ist die Spur $= 0$. Zudem gilt $\langle 0v, w\rangle = \langle v, 0w\rangle$. Damit ist auch $i(AB - BA) \in H(n)$.

c.) $H(n)$ ist mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle := \frac{1}{2} Spur(AB)$ ein euklidischer Vektorraum.

Mit Formel $(*)$ aus Aufgabe 2 gilt:

$$Spur(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

und mit $(**)$:

$$Spur(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Damit das $H(n)$ mit diesem Skalarprodukt einen euklidischen Vektorraum bildet, muß es

- linear in jedem Argument sein
- symetrisch sein
- positiv definit sein

Symetrisch

Die Berechnung der Spur ist symetrisch. (Siehe Aufgabe 2). Damit gilt

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2} Spur(A, B) = \frac{1}{2} Spur(B, A) = \langle B, A\rangle$$

Damit ist das Skalarprodukt symetrisch.

Linear

$$\begin{aligned} \langle kA + lC, B\rangle &= \frac{1}{2}\, Spur(kA + lC, B) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (ka_{ij} + lc_{ij}) b_{ij} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(ka_{ij}b_{ij}) + (lb_{ij}c_{ij})] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[k(a_{ij}b_{ij}) + l(b_{ij}c_{ij})] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k(a_{ij}b_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l(b_{ij}c_{ij}) \\
&= k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + l\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{ij} \\
&= k\langle A,B\rangle + l\langle B,C\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle A, kB+lC\rangle &= \frac{1}{2}\, Spur(A, kB+lC) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(kb_{ij} + lc_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(a_{ij}kb_{ij}) + (la_{ij}c_{ij})] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[k(a_{ij}b_{ij}) + l(a_{ij}c_{ij})] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k(a_{ij}b_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l(a_{ij}c_{ij}) \\
&= k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + l\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} \\
&= k\langle A,B\rangle + l\langle A,C\rangle
\end{aligned}
$$

Damit ist es linear in jedem Element.

Positiv definit

$$
\langle A, A\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2
$$

Damit ist es positiv definit.

Das Skalarprodukt ist symetrisch, linear in jedem Argument und positiv definit. Damit ist es das Skalarprodukt eines euklidischen Vektorraumes.