Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 5

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

1.) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal? Bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

Für orthogonale Matrizen gilt $AA^T = E_n$.

a.) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist diese Matrix orthogonal.

b.) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Damit ist diese Matrix nicht orthogonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

Die Inverse der Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c.) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist diese Matrix orthogonal

2.) Man zeige, dass die Multiplikation mit einer orthogonalen 2×2-Matrix entweder eine Rotation oder eine Spiegelung an der x-Achse ist, der eine Rotation vorausgeht.

Sei A eine 2×2 Matrix mit Elementen aus $\mathbb{R}$. Dann hat AA^T folgende Form:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Damit A eine orthogonale Basis ist müssen also folgende Zusammenhänge gelten:

$$\begin{aligned} ac+bd &= 0 \\ a^2+b^2 &= 1 \\ c^2+d^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dies läßt sich umformen:

$$\begin{aligned} ac+bd=0 &\Leftrightarrow ac=-bd \\ &\Leftrightarrow a^2c^2=b^2d^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2c^2}{b^2}=d^2 \\ \\ a^2+b^2=1 &\Leftrightarrow a^2=1-b^2 \\ \\ c^2+d^2=1 &\Leftrightarrow c^2+\frac{a^2c^2}{b^2}=1 \\ &\Leftrightarrow c^2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=1 \\ &\Leftrightarrow c^2\left(1+\frac{1-b^2}{b^2}\right)=1 \\ &\Leftrightarrow c^2\left(1+\frac{1}{b^2}-\frac{b^2}{b^2}\right)=1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ c^2\left(1+\frac{1}{b^2}-1\right)=1\\
&\Leftrightarrow\ \frac{c^2}{b^2}=1\\
&\Leftrightarrow\ c^2=b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2=c^2+d^2 &\Leftrightarrow\ a^2+c^2=c^2+d^2\\
&\Leftrightarrow\ a^2=d^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ac+bd=0 &\Leftrightarrow\ acc+bcd=0\\
&\Leftrightarrow\ ac^2+bcd=0\\
&\Leftrightarrow\ ab^3+b^2cd=0\\
&\Leftrightarrow\ ab^3+c^2cd=0\\
&\Leftrightarrow\ ab^3+c^3d=0
\end{aligned}
$$

Multipliziert man die Matrix A mit einem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}
$$

So muß der Abstand vom Ursprung dieses Vektors derselbe sei wie der des ursprünglichen Vektors, wenn es sich um eine Rotation handeln soll:

$$
\begin{aligned}
&\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}\right|\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+c^2x^2+2cdxy+d^2y^2\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2=a^2x^2+b^2x^2+c^2y^2+d^2y^2+2(ab+cd)xy\\
\Leftrightarrow\ &b^2x^2+b^2y^2=a^2b^2x^2+b^2b^2x^2+b^2c^2y^2+b^2d^2y^2+2(abb^2+b^2cd)xy\\
\Leftrightarrow\ &b^2x^2+b^2y^2=a^2b^2x^2+b^2b^2x^2+b^2c^2y^2+b^2d^2y^2+2(ab^3+c^3d)xy\\
\Leftrightarrow\ &b^2x^2+b^2y^2=a^2b^2x^2+b^2b^2x^2+b^2c^2y^2+b^2d^2y^2+2\cdot 0xy\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2=a^2x^2+b^2x^2+c^2y^2+d^2y^2\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2=(a^2+b^2)x^2+(c^2+d^2)y^2\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2=1x^2+1y^2\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2=x^2+y^2
\end{aligned}
$$

Damit haben die beiden Vektoren dieselbe Länge, befinden sich aber an verschiedenen Positionen.

3.) Man zeige mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass für positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ $(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$ gilt.

Behauptung: Für positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

Beweis:
Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist für zwei Vektoren u, v definiert als

$$|u| \cdot |v| \geqslant \langle u, v\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |u|^2 \cdot |v|^2 \geqslant \langle u, v\rangle^2$$

Das Skalarprodukt ist

$$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$$

Das Quadrat der Länge

$$|u|^2 = \langle u, u\rangle = u_1^2 + \ldots + u_n^2$$

Für zwei Vektoren $u := \left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)$ und $v := \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$ gilt also:

$$\begin{aligned}
|u|^2 \cdot |v|^2 &= \left(\sqrt{a_1}^2 + \ldots + \sqrt{a_n}^2\right)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2\right] \\
&= (a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \\
\langle u, v\rangle^2 &= \left(\sqrt{a_1}\frac{1}{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n}\frac{1}{a_n}\right)^2 \\
&= \left(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\ mal}\right)^2 \\
&= n^2
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

q.e.d.

4.) Für jeden Eigenwert λ von $A = (a_{i,j}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt $|\lambda| \leqslant \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \mid i = 1, \ldots, n \right\}$.

Für eine 2×2 Matrix gilt:

$$\begin{aligned}
\det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} - \lambda E_n\right] &= \det\begin{pmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda \end{pmatrix} \\
&= (a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) - a_{1,2}a_{2,1} \\
&= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,1}\lambda - a_{2,2}\lambda + \lambda^2 - a_{1,2}a_{2,1} \\
&= \lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}
\end{aligned}$$

Jetzt guckt euch nochmal die determinatenentwicklungsformel an, ich glaube, damit werdet ihr gluecklich.