Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 4

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

1.) Sind die angegebenen Vektoren u, v orthogonal?

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

a.) $u = (-1, 3, 2)^T,\ v = (4, 2, -1)^T$

$$(-1,3,2)^T \bullet (4,2,-1)^T \quad = \quad -1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 + 6 - 2 = 0$$

Ja, $(-1,3,2)^T$ und $(4,2,-1)^T$ stehen senkrecht aufeinander.

b.) $u = (4, 7, 5)^T,\ v = (0, 0, 0)^T$

$$(4,7,5)^T \bullet (0,0,0)^T \quad = \quad 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Ja, $(4,7,5)^T$ und $(0,0,0)^T$ stehen senkrecht aufeinander.
Der Nullvektor steht im übrigen senkrecht auf ALLEN anderen Vektoren, auch auf sich selbst.

c.) $u = (2, 1, 3)^T,\ v = (1, 7, k)^T$

$$(2,1,3)^T \bullet (1,7,k) \quad = \quad 2 \cdot 1 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot k = 2 + 7 + 3k = 9 + 3k$$

Damit $9 + 3k = 0$ gilt, muß $k := -3$ sein. Damit steht der Vektor $(2,1,3)^T$ senkrecht auf $(1,7,3)$.

2.) Beweisen Si in euklidischen Vektorräumen für Vektoren u, v die Gleichung $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

Behauptung: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2$ ist gleich $2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

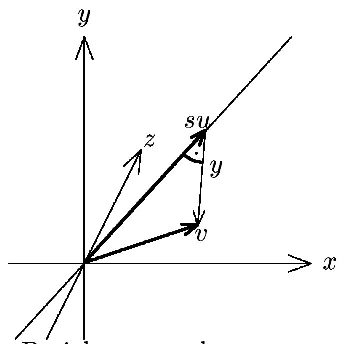
Beweis:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\
&= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\
&= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle \\
&= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2
\end{aligned}$$

q.e.d.

3.) Sei $u = (2, 1, 5)^T$ ein Vektor des $\mathbb{R}^3$. Beschreiben Sie die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{R}u$.

Wenn man einen Vektor v orthogonal auf ein Vielfaches des Vektors u projiziert, so sieht das folgendermaßen aus:



$u, v, y \in \mathbb{R}^3$
$s \in \mathbb{R}$

Also müssen die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} su \cdot y &= 0 \\ su + y &= v \end{aligned}$$

Mit $u = (2, 1, 5)$ führt das auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} su \cdot y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2sy_1 + sy_2 + 5sy_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2y_1 + y_2 + 5y_3 = 0 \end{aligned}$$

$$su + y = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2s + y_1 &= v_1 \\ s + y_2 &= v_2 \\ 5s + y_3 &= v_3 \end{aligned}$$

Also hat man folgendes inhomogenes lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Dies lässt sich mit Hilfe des Gaussverfahrens lösen:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & v_3 \end{array}\right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} -25 & 2 & 1 & 0 & -5v_3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & v_3 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} -26 & 2 & 0 & 0 & -5v_3 - v_2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & v_3 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} -30 & 0 & 0 & 0 & -5v_3 - v_2 - 2v_1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & v_3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15}v_1 + \frac{1}{30}v_2 + \frac{1}{6}v_3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & v_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & v_3 \end{array}\right)$$

Also ist $s = \frac{1}{15}v_1 + \frac{1}{30}v_2 + \frac{1}{6}v_3$. Und damit ist die Projektion auf $\mathbb{R}u$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{15}v_1 & + & \frac{1}{15}v_2 & + & \frac{1}{3}v_3 \\ \frac{1}{15}v_1 & + & \frac{1}{30}v_2 & + & \frac{1}{6}v_3 \\ \frac{1}{3}v_1 & + & \frac{1}{6}v_2 & + & \frac{5}{6}v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{1}{30} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

4.) Sei P_2 der reelle Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und mit Grad $\leqslant 2$. Definiere ein Skalarprodukt durch $\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Konstruieren Sie mit dem Gram-Schidt-Verfahren aus der Basis $(1, x, x^2)$ eine Orthonormalbasis von P_2. Beschreiben Sie das Polynom $1-7x+2x^2$ durch diese neue Basis.

Seien die Polynome p, q folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} p(x) &:= ax^2 + bx + c \\ q(x) &:= dx^2 + ex + f \end{aligned}$$

Also ist $p(x)q(x)$

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= (ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f) \\ &= ax^2(dx^2 + ex + f) + bx(dx^2 + ex + f) + c(dx^2 + ex + f) \\ &= adx^4 + aex^3 + afx^2 + bdx^3 + bex^2 + bfx + cdx^2 + cex + cf \\ &= adx^4 + (ae + bd)x^3 + (af + be + cd)x^2 + (bf + ce)x + cf \end{aligned}$$

Das Integral dieses Polynomes im Intervall $[-1, 1]$ ist

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{1} adx^4 + (ae + bd)x^3 + (af + be + cd)x^2 + (bf + ce)x + cf \; dx \\ = & \left[\frac{1}{5}adx^5 + \frac{1}{4}(ae + bd)x^4 + \frac{1}{3}(af + be + cd)x^3 + \frac{1}{2}(bf + ce)x^2 + cfx + h\right]_{-1}^{1} \\ = & \frac{1}{5}ad(1)^5 + \frac{1}{4}(ae + bd)(1)^4 + \frac{1}{3}(af + be + cd)(1)^3 + \frac{1}{2}(bf + ce)(1)^2 + cf(1) + h - \\ & \quad \frac{1}{5}ad(-1)^5 - \frac{1}{4}(ae + bd)(-1)^4 \frac{1}{3}(af + be + cd)(-1)^3 - \frac{1}{2}(bf + ce)(-1)^2 - cf(-1) - h \\ = & \frac{2}{5}ad + \frac{2}{3}(af + be + cd) + 2cf \end{aligned}$$

Zwischen den drei Basisvektoren $(1, X, X^2)$ errechnen sich damit folgende Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}
\langle 1, X\rangle &\implies a := 0,\ b := 0,\ c := 1,\ \ d := 0,\ e := 1,\ f := 0 \\
\langle 1, X\rangle &= \frac{2}{5}0\cdot 0 + \frac{2}{3}0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 1, X^2\rangle &\implies a := 0,\ b := 0,\ c := 1,\ \ d := 1,\ e := 0,\ f := 0 \\
\langle 1, X^2\rangle &= \frac{2}{5}0\cdot 1 + \frac{2}{3}(0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1) + 2\cdot 1\cdot 0 \\
&= 0 + \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X, X^2\rangle &\implies a := 0,\ b := 1,\ c := 0,\ \ d := 1,\ e := 0,\ f := 0 \\
\langle X, X^2\rangle &= \frac{2}{5}0\cdot 1 + \frac{2}{3}(0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1) + 2\cdot 0\cdot 0 \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Damit steht X orthogonal auf 1 und X^2, aber 1 nicht auf X^2.

Die Länge eines Vektors ist $|p| = \sqrt{\langle p, p\rangle}$, also für $p(x)$:

$$\begin{aligned}
d := a,\ e := b,\ f := c \quad \Rightarrow \qquad \langle p, p\rangle &= \frac{2}{5}a^2 + \frac{2}{3}(ac + b^2 + ac) + 2c^2 \\
&= \frac{2}{5}a^2 + \frac{2}{3}(2ac + b^2) + 2c^2 \\
\sqrt{\langle p, p\rangle} \quad &= \quad \sqrt{\frac{2}{5}a^2 + \frac{2}{3}(2ac + b^2) + 2c^2}
\end{aligned}$$

Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren bildet man die Orthonormalbasis wie folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1 : &= 1 \\
|\tilde{v}_1| &= \sqrt{2} \\
v_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{v}_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 &:= X \\
\tilde{v}_2 &= w_2 - \langle w_2, v_1\rangle \cdot v_1 \\
&= X - \left\langle X, \sqrt{\frac{1}{2}}\right\rangle \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= X - 0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\
&= X \\
|\tilde{v}_2| &= \sqrt{\frac{2}{5}0^2 + \frac{2}{3}(0 \cdot 0 + 1^2) + 2 \cdot 0^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \\
v_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} X = \sqrt{\frac{3}{2}} X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_3 &:= X^2 \\
\tilde{v}_3 &= w_3 - \langle w_3, v_1 \rangle \cdot v_1 - \langle w_3, v_2 \rangle \cdot v_2 \\
&= X^2 - \left\langle X^2, \sqrt{\frac{1}{2}} \right\rangle \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - \left\langle X^2, \sqrt{\frac{3}{2}} X \right\rangle \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} X \\
&= X^2 - \left[\frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{2}{3}\left(1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0\right) + 2 \cdot 0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right] \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - 0 \cdot X \\
&= X^2 - \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right] \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\
&= X^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\
&= X^2 - \frac{1}{3} \\
|\tilde{v}_3| &= \sqrt{\frac{2}{5}1^2 + \frac{2}{3}\left(-2 \cdot 1\frac{1}{3} + 0^2\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{5} - \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{18}{45} - \frac{10}{45}} = \sqrt{\frac{8}{45}} \\
v_3 &= \sqrt{\frac{45}{8}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} X^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

Damit ist die neue orthonormale Basis des P_2 mit dem obigen Skalarprodukt

$$
\left\{ \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} X, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}
$$

Möchte man das Polynom $2x^2 - 7x + 1$ durch die Basis ausdrücken, teilt man zuerst $2x^2$ durch v_3, dann $-7x$ durch v_2 und berechnet mit den Vielfachen von

v_1 den Rest:

$$\begin{aligned}
\frac{2X^2}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(X^2-\frac{1}{3}\right)} &\approx \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} \\
\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(X^2-\frac{1}{3}\right) &= 2\left(X^2-\frac{1}{3}\right) = 2X^2-\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$-\frac{7X}{\sqrt{\frac{3}{2}}X} = -7\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}
1-\left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{8}{3} \\
\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} &= \frac{8}{3}\cdot\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Damit läst sich das Polynom mit dieser Basis folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}v_3 - 7\sqrt{\frac{2}{3}}v_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}v_1$$