Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 3

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

1.) Bestimmen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ 0 & \ddots & * \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den Eigenwert λ einer Matrix A kann man dadurch bestimmen, daß man ihn so wählt, daß

$$\det(A - \lambda E_n) \;=\; 0$$

gilt.

A.)

$$0 = \det(A - \lambda E_2) \;\Leftrightarrow\; 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow 0 = \lambda^2 - 12 \Leftrightarrow 12 = \lambda^2$$

Damit sind die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \sqrt{12}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{12}$

B.)

B ist eine obere Dreiecksmatrix. Die Determinante ist das Produkt der Werte auf der Hauptdiagonalen.

$\det(B - \lambda E_n) = 0$ gilt daher, wenn $\lambda \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist. Damit liegen die möglichen Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen.

C.)

$$\det(C - \lambda E_3) \;=\; \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[(4-\lambda)(1-\lambda) + 2] \\ &= (1-\lambda)[\lambda^2 - 5\lambda + 6] \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

Damit sind die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$.

2.) Bestimmen Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrizen A und C in Aufgabe 1

A.)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = \sqrt{12},\ \lambda_2 = -\sqrt{12}$$

$$\begin{array}{rcl} Ax = \lambda_1 x & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{12} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{rcl} 3y & = & \sqrt{12}x \\ 4x & = & \sqrt{12}y \end{array} \end{array}$$

somit gilt

$$\begin{array}{rcl} 3y = \sqrt{12}x & \Leftrightarrow & y = \frac{\sqrt{12}}{3}x \\ 4x = \sqrt{12}y & \Leftrightarrow & x = \frac{4}{\sqrt{12}}y \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Ax = \lambda_2 x & \Rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\sqrt{12} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{rcl} 3y & = & -\sqrt{12}x \\ 4x & = & -\sqrt{12}y \end{array} \end{array}$$

somit gilt

$$\begin{array}{rcl} 3y = -\sqrt{12}x & \Leftrightarrow & y = -\frac{\sqrt{12}}{3}x \\ 4x = -\sqrt{12}y & \Leftrightarrow & x = -\frac{4}{\sqrt{12}}y \end{array}$$

Also ist der Eigenvektor von A zum Eigenwert $\sqrt{12}$ der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{12}}{3} \end{pmatrix}$ und der zum Eigenwert $-\sqrt{12}$ somit $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{12}}{3} \end{pmatrix}$

C.)

$$C := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (C - \lambda E_3)x = 0$$

Mit $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 3x & + & z & = & 0 \\ -2x & & & = & 0 \\ -2x & & & = & 0 \end{array}$$

Somit ist $x = 0$, $z = 0$ und y beliebig. Ein Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ lautet daher

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & + & z & = & 0 \\ -2x & - & y & & & = & 0 \\ -2x & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2x & = & -z \\ -2x & = & y \\ -2x & = & z \end{array}$$

Mit $x := 1$ ergibt sich daher als ein Eigenvektor v_2 zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & & & = & 0 \\ -2x & & & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ -x & = & y \\ -x & = & z \end{array}$$

Mit $x := 1$ ergibt sich daher als ein Eigenvektor v_3 zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.) Sei A eine der Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle Geraden des $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt, die unter A invariant sind. (d.h. solche g, für die $Ax \in g$ für alle $x \in g$).

Invariant sind die Eigenvektoren der Matrizen:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Um die Eigenwerte zu finden muß

$$\det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E_2\right] = 0$$

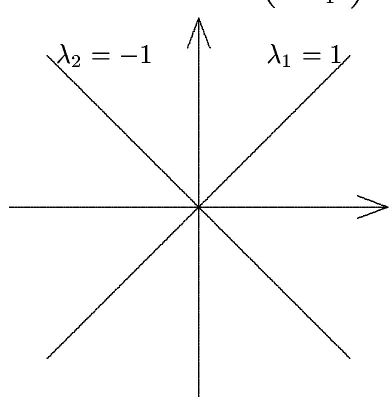
gelten:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \det\left[\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right] = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \quad &: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1 \quad &: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $\lambda_1 = 1$ sind die Eigenvektoren also alle diejenigen, bei denen beide Komponenten gleich sind: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$.
Für $\lambda_2 = 1$ sind die Eigenvektoren also alle diejenigen, bei denen die eine Komponente das negative der anderen darstellt: $\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$.



Insgesamt bilden die invarianten Geraden g also die Diagonalen des $\mathbb{R}^2$.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Dies ist eine obere Dreiecksmatrix, daher liegen die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen. Dort liegen nur Zweien, daher ist der einzige Eigenvektor dieser

Matrix $\lambda = 2$.

$$\lambda = 2 \quad : \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & = & 2x_1 \\ 2x_2 & = & 2x_2 \end{array}$$

Also ist $x_2 = 0$, und x_1 frei wählbar. Also haben die Eigenvektoren die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Insgesamt liegen somit alle invarianten Geraden auf der x-Achse.

4.) Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $A : I\!R^2 \to R^2, \ x \mapsto Ax$

1. **für $(a-d)^2 + 4bc > 0$ zwei verschiedene relle Eigenwerte,**
2. **für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ genau einen rellen Eigenwert,**
3. **für $(a-d)^2 + 4bc < 0$ keinen rellen Eigenwert**

besitzt.

Damit zu einem Eigenwert λ ein Vektor v der Eigenvektor ist, muß folgende Beziehung gelten:

$$Av = \lambda v$$

(mit $\lambda \in I\!R$, $v = (v_1, v_2)^T \in I\!R^2$). Also:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} av_1 + bv_2 & = & \lambda v_1 \\ cv_1 + dv_2 & = & \lambda v_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcll} (a-\lambda)v_1 + bv_2 & = & 0 & I \\ cv_1 + (d-\lambda)v_2 & = & 0 & II \end{array}$$

Insgesamt ergibt sich somit ein homogenes lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten.

$$\begin{array}{rcl} I: \ (a-\lambda)v_1 + bv_2 = 0 & \Leftrightarrow & (a-\lambda)v_1 = -bv_2 \Leftrightarrow -\dfrac{a-\lambda}{b} v_1 = v_2 \\ II: \ cv_1 + (d-\lambda)v_2 = 0 & \Leftrightarrow & cv_1 - (d-\lambda)\dfrac{a-\lambda}{b} v_1 = 0 \\ & \Leftrightarrow & c - \dfrac{(d-\lambda)(a-\lambda)}{b} = 0 \\ & \Leftrightarrow & bc - (d-\lambda)(a-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow & bc - (ad - \lambda a - \lambda d + \lambda^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & bc - (ad - (a+d)\lambda + \lambda^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & -\lambda^2 + (a+d)\lambda - ad + bc = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \end{array}$$

Die Nullstellen $\lambda_{1,2}$ lassen sich mit Hilfe der quadratischen Ergänzung finden.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$

$p := -(a+d),\ q := ad - bc$:

$$\begin{aligned}
& \lambda_{1,2} = -\frac{-(a+d)}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ad+d^2}{4} + \frac{4bc-4ad}{4}} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2+2ad+d^2-4ad+4bc}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}
\end{aligned}$$

Die Quadratwurzel hat

Zwei Lösungen , wenn $(a-d)^2 + 4bc > 0$

Eine Lösung , wenn $(a-d)^2 + 4bc = 0$

Keine Lösung , wenn $(a-d)^2 + 4bc < 0$

q.e.d.