Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 2

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

1.) Sei K ein Körper und seien $p, q \in K[X]$ teilerfremde Polynome. Zeigen Sie: Es gibt Polynome $h, k, r \in K[X]$ mit $\deg(h) < deg(p)$, $deg(k) < deg(q)$ für die $\frac{1}{p(t)q(t)} = \frac{h(t)}{p(t)} + \frac{k(t)}{q(t)} + r(t)$ für alle $t \in K$ mit $p(t)q(t) \neq 0$ gilt. Berechnen Sie h, k, r für $K = \mathbb{R}$ und $p = x^2 + x + 1$ und $q = x + 2$.

a.)

Die Polynome seien endlich. Dann gilt:

$$\frac{1}{p(t)q(t)} = \frac{h(t)}{p(t)} + \frac{k(t)}{q(t)} + r(t) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = q(t)h(t) + p(t)k(t) + p(t)q(t)r(t) \qquad (1)$$

Zudem haben sie die Form

$$\begin{aligned}
h(t) &= \sum_{i=0}^{a} h_i t^i \\
k(t) &= \sum_{i=0}^{b} k_i t^i \\
p(t) &= \sum_{i=0}^{c} p_i t^i \\
q(t) &= \sum_{i=0}^{d} q_i t^i \\
r(t) &= \sum_{i=0}^{e} r_i t^i
\end{aligned}$$

Bildet man daher z.B. das Produkt $h(t)q(t)$, so rechnet man

$$\begin{aligned}
h(t)q(t) &= \left(\sum_{i=0}^{a} h_i t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{d} q_i t^i\right) \\
&= h_0 \left(\sum_{i=0}^{d} q_i t^i\right) + h_1 t \left(\sum_{i=0}^{d} q_i t^i\right) + \ldots + h_a t^a \left(\sum_{i=0}^{d} q_i t^i\right) \\
&= h_0 q_0 + h_0 q_1 t + \ldots + h_0 q^d t^d + h_1 t q_0 + h_1 t q_1 t + \ldots + h_1 t q_d t^d + \ldots + h_a t^a q_d t^d \\
&= h_0 q_0 + h_0 q_1 t + \ldots + h_1 q_0 t + h_1 q_1 t^2 + \ldots + h_1 q_d t^{d+1} + \ldots + h_a q_d t^{a+d}
\end{aligned}$$

Ordnet man dies nach t, so erhält man:

$$h(t)q(t) = h_0 q_0 + t(h_0 q_1 + h_1 q_0) + t^2(h_0 q_2 + h_1 q_1 + h_2 q_0) + \ldots + t^{a+d}(h_a q_d)$$

In Summenschreibweise somit:

$$h(t)q(t) = \sum_{n=0}^{a+d} t^n \left(\sum_{i+j=n} h_i q_j \right)$$

Also läßt sich die Formel (1) schreiben als

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\deg(p)+\deg(q)} t^n \left(\sum_{\substack{i+j=n \\ i<\deg(p) \\ j<\deg(q)}} h_i q_j + \sum_{\substack{i+j=n \\ i<\deg(q) \\ j\le\deg(p)}} k_i p_j + \sum_{i+j+g=n} p_i q_j r_g \right) \\ &= h_0 q_0 + k_0 p_0 + p_0 q_0 r_0 + \sum_{n=1}^{\deg(p)+\deg(q)} t^n \left(\sum_{\substack{i+j=n \\ i<\deg(p) \\ j\le\deg(q)}} h_i q_j + \sum_{\substack{i+j=n \\ i<\deg(q) \\ j\le\deg(p)}} k_i p_j + \sum_{i+j+g=n} p_i q_j r_g \right) \end{aligned}$$

Daran erkennt man, daß man nur für Polynome $p,\ q$ Polynome $h,\ k,\ r$ findet, wenn p_0 oder q_0 ungleich 0 sind, was für teilerfremde Polynome gegeben ist. (Da sonst t ein gemeinsamer Teiler wäre.)
Alle Koeffizienten, die in den Klammern berechnet werden müssen 0 ergeben.

Insgesamt ergibt sich somit ein inhomogenes Gleichungssystem mit $\deg(p) + \deg(q) + 1$ Gleichungen und maximal

$$\underbrace{(\deg(p)-1)}_{h} + \underbrace{(\deg(q)-1)}_{k} + \underbrace{(\deg(p)+\deg(q)+1)}_{r}$$

Unbekannten. Also läßt sich eine Lösung finden, also existieren die Polynome $h(t),\ k(t),\ r(t)$ die die Bedingung (1) erfüllen.

b.)

Für $p = t^2 + t + 1,\ q = t + 2$ ist also $\deg(p) = 2,\ \deg(q) = 1$, somit also $\deg(h) = 1,\ \deg(k) = 0$.

$$\begin{aligned} 1 = {} & h_0 q_0 + k_0 p_0 + p_0 q_0 r_0 + t \cdot (h_0 q_1 + h_1 q_0 + k_0 p_1 + p_0 q_0 r_1 + p_0 q_1 r_0 + p_1 q_0 r_0) \\ & + t^2 (h_1 q_1 + k_0 p_2 + p_0 q_1 r_1 + p_1 q_0 r_1 + p_1 q_1 r_0 + p_2 q_0 r_0 + p_0 q_0 r_2) \\ & + t^3 (p_1 q_1 r_1 + p_1 q_0 r_2 + p_0 q_1 r_2 + p_2 q_0 r_1 + p_0 q_0 r_3) \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
1 &= h_0 2 + k_0 1 + 1\cdot 2\cdot r_0 + t\cdot(h_0 1 + h_1 2 + k_0 1 + 1\cdot 2\cdot r_1 + 1\cdot 1\cdot r_0 + 1\cdot 2\cdot r_0)\\
&\quad + t^2(h_1 1 + k_0 1 + 1\cdot 1\cdot r_1 + 1\cdot 2\cdot r_1 + 1\cdot 1\cdot r_0 + 1\cdot 2\cdot r_0 + 1\cdot 2\cdot r_2)\\
&\quad + t^3(1\cdot 1 r_1 + 1\cdot 2 r_2 + 1\cdot 1 r_2 + 1\cdot 2 r_1 + 1\cdot 2 r_3)\\
&= 2h_0 + k_0 + 2r_0 + t(h_0 + 2h_1 + k_0 + 3r_0 + 2r_1) + t^2(h_1 + k_0 + 3r_0 + 3r_1 + 2r_2)\\
&\quad + t^3(3r_1 + 3r_2 + 2r_3)
\end{aligned}$$

$h_0 := 0,\ k_0 := 1,\ r_0 = 0:$

$$\begin{aligned}
1 &= 0 + 1 + 0 + t(0 + 2h_1 + 1 + 0 + 2r_1) + t^2(h_1 + 1 + 0 + 3r_1 + 2r_2) + t^3(3r_1 + 3r_2 + 2r_3)\\
&= 1 + t(2h_1 + 2r_1 + 1) + t^2(h_1 + 3r_1 + 2r_2 + 1) + t^3(3r_1 + 3r_2 + 2r_3)
\end{aligned}$$

$h_1 := -\frac{1}{2},\ r_1 := 0:$

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + t\left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 1\right) + t^2\left(\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 2r_2 + 1\right) + t^3(0 + 3r_2 + 2r_3)\\
&= 1 + t(-1 + 1) + t^2\left(\frac{1}{2} + 2r_2\right) + t^3(3r_2 + 2r_3)\\
&= 1 + t^2\left(\frac{1}{2} + 2r_2\right) + t^3(3r_2 + 2r_3)
\end{aligned}$$

$r_2 = -\frac{1}{4}:$

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + t^2\left(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{4}\right) + t^3\left(-3\frac{1}{4} + 2r_3\right)\\
&= 1 + t^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + t^3\left(-\frac{3}{4} + 2r_3\right)\\
&= 1 + t^3\left(-\frac{3}{4} + 2r_3\right)
\end{aligned}$$

$r_3 = \frac{3}{8}:$

$$\begin{aligned}
1 &= 1 + t^3\left(-\frac{3}{4} + 2\frac{3}{8}\right)\\
&= 1 + t^3\left(-\frac{3}{4} + \frac{6}{8}\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Für die Polynome $h,\ k,\ r$, definiert als

$$\begin{aligned} h(t) &= -\frac{1}{2}t \\ k(t) &= 1 \\ r(t) &= -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t^3 \end{aligned}$$

Gilt somit die Forderung.

2.) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $f_1 = X^{15} + X^{12} + X^{10} + X^9 + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1$ $f_2 = X^{12} + X^9 + X^7 + X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + X + 1$, und stellen Sie diesen in der Form $hf_1 + kf_2$ dar.

$f_1 = qf_2 + f_3$

$$\begin{aligned} q \approx \frac{f_1}{f_2} &= \frac{X^{15} + X^{12} + X^{10} + X^9 + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1}{X^{12} + X^9 + X^7 + X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + X + 1} \\ &\Rightarrow \quad q = x^3,\ f_3 = -x^8 - x^3 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

$f_2 = qf_3 + f_4$

$$\begin{aligned} q \approx \frac{f_2}{f_3} &= \frac{X^{12} + X^9 + X^7 + X^6 + X^5 + X^3 + X^2 + X + 1}{-x^8 - x^3 + x^2 + 1} \\ &\Rightarrow \quad q = -x^4 - x,\ f_4 = 2x^6 + x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

$f_3 = qf_4 + f_5$

$$\begin{aligned} q \approx \frac{f_3}{f_4} &= \frac{-x^8 - x^3 + x^2 + 1}{2x^6 + x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1} \\ &\Rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8},\ f_5 = \frac{9}{8}x^5 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$f_4 = qf_5 + f_6$

$$\begin{aligned} q \approx \frac{f_4}{f_5} &= \frac{2x^6 + x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1}{\frac{9}{8}x^5 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{8}} \\ &\Rightarrow \quad q = \frac{16}{9}x + \frac{8}{9},\ f_6 = 0 \end{aligned}$$

Der letzte Rest ungleich 0 ist der ggT, in diesem Fall also $\frac{9}{8}x^5 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{8}$.

$ggT = h \cdot f1 + k \cdot f_2.$

$$\frac{f_1}{ggT} = \frac{X^{15} + X^{12} + X^{10} + X^9 + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 1}{\frac{9}{8}x^5 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{8}} = \frac{8}{9}x^{10} + \frac{8}{9}x^4 + \frac{8}{9}$$

$$\frac{f_2}{ggt} = \frac{X^{12}+X^9+X^7+X^6+X^5+X^3+X^2+X+1}{\frac{9}{8}x^5+\frac{9}{8}x^2+\frac{9}{8}} = \frac{8}{9}x^7+\frac{8}{9}x+\frac{8}{9}$$

Somit wäre $\frac{f_1}{\frac{8}{9}x^{10}+\frac{8}{9}x^4+\frac{8}{9}}$ und $\frac{f_2}{\frac{8}{9}x^7+\frac{8}{9}x+\frac{8}{9}}$ der ggT, also ist

$$h := \frac{9}{16x^{10}+16x^4+16}$$
$$k := \frac{9}{16x^7+16x+16}$$

3.) Zeigen Sie: Die Teilmenge $\mathbb{Z}[i] := \{c = a+bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ des Körpers der komplexen Zahlen bildet bezüglich dessen Addition und Multiplikation einen nullteilerfreien Ring mit Eins. Bestimmen Sie die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$. Ist $1+i$ zerlegbar oder unzerlegbar?

Die Teilmenge ist ein nullteilerfreier Ring mit 1, wenn sie

- Abgeschlossen, Assoziativ, Kommutativ bezüglich der Addition ist
- Ein neutrales und inverse Elemente der Addition enthält
- Abgeschlossen und assoziativ bezüglich der Multiplikation ist
- Ein neutrales Multiplikatives Element besitzt
- Distributivität Addition und Multiplikation verbindet
- Für kein $c \in \mathbb{Z}[i]$ ein $d \in \mathbb{Z}[i]$ existiert, so daß $cd = 0$ ergibt.

Abgeschlossenheit Addition

$$c_1 + c_2 = (a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = a_1+b_i+a_2+b_2i = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}$ also auch $(a_1+a_2) \in \mathbb{Z}$, außerdem $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, also auch $(b_1+b_2) \in \mathbb{Z}$, also auch $(c_1+c_2) \in \mathbb{Z}[i]$.

Assoziativität Addition

$$\begin{aligned} c_1+(c_2+c_3) &= a_1+b_1i+(a_2+b_2i+a_3+b_3i) = a_1+b_1i+a_2+b_2i+a_3+b_3i \\ &= (a_1+b_1i+a_2+b_2i)+a_3+b_3i = (c_1+c_2)+c_3 \end{aligned}$$

Kommutativität Addition

$$\begin{aligned} c_1+c_2 &= a_1+b_1i+a_2+b_2i = a_1+a_2+(b_1+b_2)i = a_2+a_1+(b_2+b_1)i \\ &= a_2+a_1+b_2i+b_1i = a_2+b_2i+a_1+b_1i = c_2+c_1 \end{aligned}$$

neutrales Element Addition

Das neutrale Element der Addition ist 0+0i, weil

$$c+0 = a+bi+0+0i = a+0+bi+0i = (a+0)+(b+0)i = a+bi = c$$

gilt.

inverse Elemente Addition

Die inversen Elemente sind $-c$, da

$$c+(-c) = a+bi+(-(a+bi)) = a+bi+(-a-bi) = a-a+bi-bi = 0$$

Abgeschlossenheit Multiplikation

$$\begin{aligned} c_1 \cdot c_2 &= (a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i) = a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2 \\ &= a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i-b_1b_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i \end{aligned}$$

$a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}$ also auch $(a_1 \cdot a_2) \in \mathbb{Z}$, außerdem $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, also auch $(b_1 \cdot b_2) \in \mathbb{Z}$, also auch $(c_1 \cdot c_2) \in \mathbb{Z}[i]$.

Assoziativität Multiplikation

$$\begin{aligned} (c_1 \cdot c_2)\cdot c_3 &= [(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)](a_3+b_3i) \\ &= [a_1a_2+a_1b_2i+b_1ia_2+b_1ib_2i](a_3+b_3i) \\ &= [(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)](a_3+b_3i) \\ &= (a_3+b_3i)(a_1a_2-b_1b_2)+(a_3+b_3i)i(a_1b_2+a_2b_1) \\ &= a_1a_2a_3-a_3b_1b_2+b_3ia_1a_2-b_1b_2b_3i+a_1b_2a_3i+a_2b_1a_3i-b_3a_1b_2-a_2b_1b_3 \\ &= (a_1+b_1i)[a_2a_3+b_2a_3i-b_2b_3+a_2b_3i+b_2a_3i-b_2b_3+a_2a_3+a_2b_3i \\ &= (a_1+b_1i)[(a_2+b_2i)(a_3+b_3i)] = c_1\cdot(c_2\cdot c_3) \end{aligned}$$

neutrales Element

Das neutrale Element der Multiplikation ist 1+0i, weil

$$c\cdot(1+0i) = (a+bi)\cdot(1+0i) = (a\cdot 1-b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 1)i = a+bi = c$$

Distributivität

$$\begin{aligned} c_1c_2+c_1c_3 &= (a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i) \\ &= (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i+(a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+a_3b_1)i \\ &= (a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_2+a_2b_1+a_1b_3+a_3b_1)i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3) + (a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3))i \\
&= (a_1+b_1 i)(a_2+a_3+(b_2+b_3)i) = (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i+a_3+b_3 i) = c_1(c_2+c_3)
\end{aligned}
$$

Damit gilt die Distributivität.

$\mathbb{Z}[i]$ ist Nullteilerfrei, da für Polynomringe gilt: $l(c\dot{d}) = l(c)\cdot l(d)$. Da $l(c) \neq 0$ und $l(d) \neq 0$ gilt, ist somit auch $l(c\dot{d}) \neq 0$.

Die Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$ sind alle diejenigen Elemente $c \in \mathbb{Z}[i]$, bei denen ein $d \in \mathbb{Z}[i]$ existiert, so daß $cd = 1$ gilt. Da die Koeffizienten nur ganze Zahlen sein dürfen sind dies 1, -1, i und $-i$.

4.) Sei $P_2 \subset I\!R[X]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 und $D : P_2 \to P_2$ der lineare Endomorphismus $f \mapsto X^2\frac{d^2f}{dX^2} + X\frac{df}{dX}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von D.

Der Vektorraum P_2 besteht aus allen Polynomen f, die sich auf die folgende Art bilden lassen:

$$f = aX^2 + bX + c$$

Damit ist die Basis des Vektorraumes $B := \{X^2, X, 1\}$. Setzt man die Basisvektoren in D ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
D(X^2) &= X^2\frac{d^2X^2}{dX^2} + X\frac{dX^2}{dX} \\
&= X^2\cdot 2 + X\cdot 2X \\
&= 2X^2 + 2X^2 \\
&= 4X^2 \\
&= 4\cdot X^2 + 0\cdot X + 0\cdot 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(X) &= X^2\frac{d^2X}{dX^2} + X\frac{dX}{dX} \\
&= X^2\cdot 0 + X\cdot 1 \\
&= X \\
&= 0\cdot X^2 + 1\cdot X + 0\cdot 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(1) &= X^2\frac{d^2 1}{d1^2} + X\frac{d1}{dX} \\
&= X^2\cdot 0 + X\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$= \quad 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0 \cdot 1$$

Die Abbildung D läßt sich daher in der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Für die Eigenvektoren v gilt $Dv = \lambda v$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vordert man $Dv = \lambda v$ also

$$\begin{pmatrix} 4v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Also sind die Eigenwerte 4 und 1, für $\lambda = 4$ haben die Eigenvektoren die Form $\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für $\lambda = 1$ die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.