Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 10

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

1.) Finden Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$, die mit $\frac{1}{5\sqrt{2}}(0,3,4,5)^T$ beginnt.

Sei

$$\left\{ \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens läßt sich daraus eine Orthonormalbasis bilden:

$$\begin{aligned}
\tilde{v_1} &:= \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
|\tilde{v_1}| &= \frac{1}{5\sqrt{2}} \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \sqrt{50} = 1 \\
&\Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v_2} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
|\tilde{v_2}| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\
&\Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\tilde{v_3} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \right), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{50} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} \\
|\tilde{v_3}| &= \frac{1}{50}\sqrt{0^2 + 41^2 + (-12)^2 + (-15)^2} = \frac{5\sqrt{82}}{50} = \frac{\sqrt{82}}{10} \\
&\Rightarrow \quad v_3 = \frac{1}{5\sqrt{82}} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{v_4} := & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{5\sqrt{82}} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} \\
& - \left\langle \frac{1}{5\sqrt{82}} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{12}{5\sqrt{82}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{82}} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{50} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{12}{2050} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} \\
= & \frac{2050}{2050} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{164}{2050} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{12}{2050} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} \\
= & \frac{1}{2050} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1250 \\ -1000 \end{pmatrix} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix} \\
|\tilde{v_4}| = & \frac{1}{41}\sqrt{0^2 + 0^2 + 25^2 + (-20)^2} = \frac{5\sqrt{41}}{41}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad v_4 = \frac{1}{5\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Überprüfen:

$\langle , \rangle$	$\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5\sqrt{82}}\begin{pmatrix}0\\41\\-12\\-15\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5\sqrt{41}}\begin{pmatrix}0\\0\\25\\-20\end{pmatrix}$
$\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{2}}(\cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 +5 \cdot 5) = \frac{1}{50} \cdot 50 = 1$	$\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot (0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 +5 \cdot 0) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot (0 \cdot 0 + 3 \cdot 41 - 4 \cdot 12 -5 \cdot 15) = \frac{1}{50\sqrt{41}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot (0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 25 -5 \cdot 20) = \frac{1}{25\sqrt{82}} \cdot 0 = 0$
$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot (1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \quad 0 \cdot 5) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 +0 \cdot 0 = 1$	$\frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot (1 \cdot 0 + 0 \cdot 41 - 0 \cdot 12 -0 \cdot 15) = \frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot (1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 25 -0 \cdot 20) = \frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot 0 = 0$
$\frac{1}{5\sqrt{82}}\begin{pmatrix}0\\41\\-12\\-15\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot (0 \cdot 0 + 3 \cdot 41 - 4 \cdot 12 -5 \cdot 15) = \frac{1}{50\sqrt{41}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot (0 \cdot 1 + 41 \cdot 0 - 12 \cdot 0 -15 \cdot 0) = \frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot (0 \cdot 0 + 41 \cdot 41 + 12 \cdot 12 +15 \cdot 15) = \frac{1}{2050} \cdot 2050 = 1$	$\frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot (0 \cdot 0 + 41 \cdot 0 - 12 \cdot 25 +15 \cdot 20) = \frac{1}{1025\sqrt{2}} \cdot 0 = 0$
$\frac{1}{5\sqrt{41}}\begin{pmatrix}0\\0\\25\\-20\end{pmatrix}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot (0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 25 -5 \cdot 20) = \frac{1}{25\sqrt{82}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot (1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 25 -0 \cdot 20) = \frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{82}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot (0 \cdot 0 + 41 \cdot 0 - 12 \cdot 25 +15 \cdot 20) = \frac{1}{1025\sqrt{2}} \cdot 0 = 0$	$\frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot \frac{1}{5\sqrt{41}} \cdot (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 25 \cdot 25 +20 \cdot 20) = \frac{1}{1025} \cdot 1025 = 1$

Also ist

$$\left\{ \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{82}} \begin{pmatrix} 0 \\ 41 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix}, \frac{1}{5\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix} \right\}$$

Eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.

2.) Begründen Sie: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2i & 3 \\ 0 & i & 7 & 1+i \\ 2+3i & 6 & 6+4i & i^3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} +$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-3i & 0 \\ 2 & -i & 6 & 0 \\ -2i & 7 & 6-4i & \sqrt{2} \\ 3 & 1-i & i & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ **ist diagonalisierbar.**

Nach dem Spektralsatz ist eine Matrix A diagonalisierbar, wenn

$$A = \overline{A}^T$$

gilt.