Übungsaufgaben Lineare Algebra I
Blatt 1

Beth Scorer, 5643272
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

1.) Lösen Sie mit dem Gauss-Algorithmus das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ über $\mathbb{R}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 \\ 4 & 0 & 14 & 2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist.

Mit Hilfe des Gaussalgorithmus findet man heraus, daß

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & -2 \\ 4 & 0 & 14 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & -18 & 6 & -6 \\ 0 & -4 & 12 & -4 & 4 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

das Gleichungssystem 4 Unbekannte, aber nur den Rang 2 besitzt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & & & + & 7x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Daher seien x_3 und x_4 als freie Parameter gewählt.

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + 7x_3 + x_4 = 3 & \Leftrightarrow & 2x_1 = 3 - 7x_3 - x_4 \Leftrightarrow x_1 = 1{,}5 - 3{,}5x_3 - 0{,}5x_4 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 & \Leftrightarrow & -x_2 = 1 - 3x_3 + x_4 \Leftrightarrow x_2 = -1 + 3x_3 - x_4 \end{array}$$

Mit $x_3 := 1$ und $x_4 := 0$ ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} x_1 = 1,5 - 3,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0 &= -2 \\ x_2 = -1 + 3 \cdot 1 - 0 &= 2 \end{aligned}$$

und mit $x_3 := 0$ und $x_4 := 1$:

$$\begin{aligned} x_1 = 1,5 - 3,5 \cdot 0 - 0,5 \cdot 1 &= 1 \\ x_2 = -1 + 3 \cdot 0 - 1 &= -2 \end{aligned}$$

Also ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

2.) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Es gebe eine natürliche Zahl $k > 0$ mit $\varphi^k = 0$. Beweisen Sie, dass $\dim \varphi^{i+1}(V) < \dim \varphi^i(V)$ gilt, sofern $\varphi^i(V) \neq \{0\}$. Schliessen Sie daraus, dass auch $\varphi^n = 0$ gilt.

Auf den ersten Teil der Aufgabe hatten wir keinen Bock, keine Ideen etc.

Aber der zweite Teil: Sei

$$\dim \varphi^{i+1}(V) < \dim \varphi^i(V)$$

bewiesen. Dann existieren zwei Fälle:

1. Fall: $\exists \varphi^k(V) = 0, \ k < n$
φ ist eine lineare Abbildung. Wegen $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ gilt mit $w = 0$

$$\varphi(v+0) = \varphi(v) + \varphi(0) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(v) = \varphi(v) + \varphi(0)$$

daß $\varphi(0) = 0$ sein muß. Daher ist also auch $\varphi^{k+1} = 0$, und somit alle weiteren Anwendungen von φ, einschließlich φ^n.

2. Fall: $\nexists \varphi^k(V) = 0, \ k < n$
Die maximale Dimension von φ ist n. Da jede Anwendung von φ die Dimension senkt, ist sie für φ^n gleich 0. Also KANN sie nur auf den Nullvektor abbilden, also ist auch das Ergebnis von $\varphi^n = \{0\}$.

3.) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Seien weiter $\varphi : V \to K$ eine lineare Abbildung und $h \in V$ ein Vektor $\neq 0$, der sogar in $\ker \varphi$ liegt. Bestimmen Sie die Determinante der linearen Abbildung $F : V \to V,\ v \mapsto v + \varphi(v)h$. Hinweis: Berechnen Sie die Matrix zu dieser linearen Abbildung f bezüglich einer Basis, die h als erstes Element enthält.

Setzt man die Basis $B = h, v_1, v_2, \ldots$ Vektor für Vektor in die Abbildung ein, so ergibt sich im ersten Fall als Lösung h, in allen anderen Fällen $v_i + \varphi(v_i)h$ als Lösung.
Diese Lösung läßt sich als Summe der anderen Basisvektoren schreiben:

$$F(v_i) \quad = \quad \varphi(v_i)h + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n$$

Die Abbildungsmatrix hat daher die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi(v_1) & \varphi(v_2) & \cdots & \varphi(v_n) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine obere Dreiecksmatrix, auf der Hauptdiagonalen liegen nur Einsen, die Determinate ist daher 1.

4.) Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine $n \times n$-Matrxi über dem Körper K und seien $a, b \in K^n$. Das Gleichungssystem $Ax = a$ habe genau eine Lösung. Hat dann auch das Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung? Hinweis: Bestimmen Sie den Rang von A.

$Ax = a$ hat genau eine Lösung. Der Rang der Matrix ist daher n. Also hat auch $Ax = b$ genau eine Lösung.

5.) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine beliebige Matrix. Zeigen Sie: Es gibt $t_0 \in \mathbb{R}$, so daß $E_n + tA$ eine invertierbare Matrix ist für alle $t \geq t_0$

Eine Matrix ist invertierbar, sobald alle Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

Behauptung 1:

Existiert in einer Matrix A ein linear abhängiger Vektor v_j, so ist dieselbe Spalte in der Matrix $tA + E_n$ linear unabhängig.

Beweis 1:

v_j ist linear abhängig, somit gilt:

$$v_j = \sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i$$

Angenommen, die Spalte j wäre in der Matrix $tA+E_n$ ebenfalls linear abhängig, so würde

$$tv_j + e_j = t\sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i + \sum_{i \neq j}^{n} e_i$$

gelten. Dann wäre

$$tv_j + e_j = tv_j + \sum_{i \neq j}^{n} e_i$$

$\lightning$

Damit gilt die erste Behauptung.

Behauptung 2:

Existiert in einer Matrix $tA + E_n$ eine linear abhängige Spalte j, so ist dies Spalte in der Matrix $(t + x)A + E_n$ linear unabhängig.

Beweis 2:

$tv_j + e_j$ ist linear abhängig. Somit gilt

$$tv_j + e_j = t\sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i + \sum_{i \neq j}^{n} e_i$$

Angenommen, j wäre in der Matrix $(t + x)A + E_n$ linear abhängig.

$$\begin{aligned}
& (t+x)v_j + e_j = (t+x)\sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i + \sum_{i \neq j}^{n} e_i \\
\Leftrightarrow\quad & tv_j + e_j + xv_j = t\sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i + \sum_{i \neq j}^{n} e_i + x\sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i \\
\Leftrightarrow\quad & xv_j = x\sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i \\
\Leftrightarrow\quad & v_j = \sum_{i \neq j}^{n} a_i v_i
\end{aligned}$$

$\lightning$

Der Vektor in der Spalte j der Matrix A ist linear unabhängig von den anderen Spaltenvektoren, da die Spalte sonst linear unabhängig in der Matrix $tA + E_n$ gewesen wäre.

Damit wäre die Behauptung 2 bewiesen.

6.) Seien $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum $V_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ zum Eigenwert λ von A unter B invariant ist: Wenn $v \in V_\lambda$ gilt, dann auch $Bv \in V\lambda$

Ein Vektor v heißt Eigenvektor der Matrix A, und ein Wert λ Eigenwert, sobald

$$Av = \lambda v$$

gilt.

Sei $Av = \lambda v$. Für einen Vektor $w = Bv$ muß $Aw = \lambda w$ gelten, damit die Eigenvektoren einen invarianten Eigenraum bilden.

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} Av = v$$

Eingesetzt in $Bv = w$ also

$$\begin{aligned} B\frac{1}{\lambda}Av = w \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}BAv = w \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}ABv = w \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}Aw = w \\ & \Leftrightarrow \quad Aw = \lambda w \end{aligned}$$

q.e.d.