Übungsaufgaben Numerik
Vorletztes Blatt

Marina Chanuchowa, 5622011
Bibiana Gluski, 5600816
Thomas Dettbarn, 5610641

2. Juli 2004

28a.) Formulieren Sie ein Ablaufschema für die im Skript besprochene Darstellung eines Simplexschritts für $c^T x \stackrel{!}{=} \min,\ Ax = b,\ x \geqslant 0$.

Die Berechnung der linearen Optimierungsaufgabe enthält folgende Ablaufschritte:

1. Sei m die Zeilenanzahl der Matrix A
2. Füge die Schlupfvariablen in A als neue Spalten an
3. Suche eine Menge J von linear unabhängigen Spaltevektoren, $\mid J \mid = m$
4. Berechne x^* eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax^* = b$ für das gilt:

$$x^* = \begin{cases} x_i^* = 0 & : \quad i \notin J \\ \sum\limits_{i \in J} x_i^* a^i = b,\ x_i^* \geqslant 0 & : \quad i \in J \end{cases}$$

5. Sei B die Matrix der linear unabhängigen Spaltenvektoren aus der Indexmenge J. Zerlege B als LR-Matrix.
6. Berechne d_{ij} als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$a^j = \sum_{i \in J} d_{ij} a^i$$

   mit Hilfe der LR-Zerlegung.

7. Finde ein $r \notin J$, für das gilt:

$$c_r - \sum_{i \in J} c_i d_{ir} < 0$$

   Läßt sich keines finden, so ist x^* optimal. Also brich ab.

8. Finde ein $\nu \in J$, für das

$$\delta = \frac{x_\nu^*}{d_{\nu r}}$$

   minimal wird.

9. Berechne $\overline{x}$ und $\overline{J}$:

$$\overline{x_j} := \begin{cases} \delta & : j = r \\ x_j^* - \delta d_{jr} & : j \in J \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\overline{J} := (J \backslash \{\nu\}) \cup \{r\}$$

10. Setze $x^* := \overline{x}$ und $J = \overline{J}$ und wiederhole ab Schritt 5

Und nun noch einmal auf die Art und Weise, in der wir uns das ganze Semester die Beschreibung eines Algorithmusses im Skript gewünscht hätten:

Simplex(A, b, c)
1 $m \leftarrow$ ZeilenZahl(A);
2 $A \leftarrow$ Concat$(A, Schlupf)$;
3 $d \leftarrow 0$;
4 $J \leftarrow$ LinearUnabhängige(A);
5 $i \leftarrow 1$;
6 $x^* \leftarrow 0$;
7 **while** $i \leqslant m$
8   **if** $i \in J$ find x_i^* so that $\sum_{i \in J} x_i^* a^i = b$;
9   **else** $x_i^* = 0$;
10     $i \leftarrow i + 1$;
11 **for each** $j \notin J$ find d_{ij} so that $\sum_{i \in J} d_{ij} a^i = a^j$;
12 $r \leftarrow 0$;
13 **for each** $j \notin J$
14   **if** $\sum_{i \in J} c_i d_{ij} > c_r$ **then** $r \leftarrow$ j;
15 **if** $r = 0$ **then return**(x^*);
16 $\delta \leftarrow 0$;
17 $\nu \leftarrow$ -1;
18 $\mu \leftarrow 1$;
19 **while** $\mu \leqslant m$
20   **if** $\mu \in J \wedge \left(\nu = -1 \vee \frac{x_\mu^*}{d_{\mu r}} < \delta\right)$ **then**
21         $\delta \leftarrow \frac{x_\mu^*}{d_{\mu r}}$;
22         $\nu \leftarrow \mu$;
23     $\mu \leftarrow \mu + 1$;
24 $i \leftarrow 1$;
25 $\overline{x} \leftarrow x^*$;
26 **while** $i \leqslant m$
27   **case** i
28   r: $\overline{x}_i = \delta$;
29         $i \in J$: $\overline{x}_i = x_i^* - \delta d_{ir}$;
30         $i \notin J \wedge i \neq r$: $\overline{x}_i = 0$;
31     $i \leftarrow i + 1$;
32 $\overline{J} \leftarrow (J \backslash \{\nu\}) \cup \{r\}$
33 $J \leftarrow \overline{J}$;
34 $x^* \leftarrow \overline{x}$;
35 **goto** 11;

28b.) Lösen Sie durch Handrechnung die folgende lineare Optimierungsaufgabe: Minimiere $z = -3x_1 - x_2 - 3x_3$ unter den Nebenbedingungen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

1. m:=3

2.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 \leqslant 2 &\quad\Leftrightarrow\quad 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 2 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 5 &\quad\Leftrightarrow\quad 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leqslant 6 &\quad\Leftrightarrow\quad 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_6 = 6 \end{aligned}$$

   Also ist
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c := (-3, -1, -3, 0, 0, 0)^T$$
   und $b = (2, 5, 6)^T$.

3. Sei $J := \{4, 5, 6\}$.

4. Also berechnet sich x^* aus:
$$E_3 x^* \quad = \quad b$$
   und damit ist $x^* = (0, 0, 0, 2, 5, 6)^T$

5. Dann ist
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Damit ist $L = R = E_3 = L^{-1}$.

6. Wegen $L^{-1} = E_3$ ist $L^{-1} \cdot a^j = a^j$. Also ist
$$\begin{aligned} d_{41} = 2,\ d_{42} = 1,\ d_{43} = 1 \\ d_{51} = 1,\ d_{52} = 2,\ d_{53} = 3 \\ d_{61} = 2,\ d_{62} = 2,\ d_{63} = 1 \end{aligned}$$

7. Die c_i für $i \in J$ sind alle $= 0$, für $i \notin J$ sind sie < 0, somit ist de Wahl des r beliebig. Also sei $r := 1$. Für dieses ist $c_r = -3$.

8.

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{x_4^*}{d_{41}} = \frac{2}{2} = 1 \\
\delta_2 &= \frac{x_5^*}{d_{51}} = \frac{5}{1} = 5 \\
\delta_3 &= \frac{x_6^*}{d_{61}} = \frac{6}{2} = 3
\end{aligned}$$

Damit ist für $\nu := 4$ $\delta = 1$ der minimale Wert.

9. $\overline{J} = (\{4,5,6\} \backslash \{4\}) \cup \{1\} = \{1,5,6\}$

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &:= \delta = 1 \\
\overline{x}_2 &:= 0 \\
\overline{x}_3 &:= 0 \\
\overline{x}_4 &:= 2 - d_{41} = 2 - 2 = 0 \\
\overline{x}_5 &:= 5 - d_{51} = 5 - 1 = 4 \\
\overline{x}_6 &:= 6 - d_{61} = 6 - 2 = 4
\end{aligned}$$

10. Sei $x^* = (1,0,0,0,4,4)^T$ und $J = \{1,5,6\}$

5. $B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $R := L_0 A$ und $L := \Lambda_0$.

6.

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 a^2 = L_0 B d_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{52} \\ d_{62} \end{pmatrix} \\
\Lambda_0 a^3 = L_0 B d_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{13} \\ d_{53} \\ d_{63} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Lambda_0 a^4 = L_0 B d_4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{14} \\ d_{54} \\ d_{64} \end{pmatrix}$$

Also sind die Werte der d_{ij}:

$$\begin{gathered} d_{12} = \frac{1}{2},\ d_{13} = \frac{1}{2},\ d_{14} = \frac{1}{2} \\ d_{52} = \frac{5}{2},\ d_{53} = \frac{7}{2},\ d_{54} = \frac{1}{2} \\ d_{62} = 3,\ d_{63} = 2,\ d_{64} = 1 \end{gathered}$$

7.

$$\begin{aligned} c_2 - \sum_{i \in J} c_i d_{i2} &= -1 - (-3)\frac{1}{2} - 0\frac{5}{2} - 0 \cdot 3 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ c_3 - \sum_{i \in J} c_i d_{i3} &= -3 - (-3)\frac{1}{2} - 0\frac{7}{2} - 0 \cdot 2 = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \\ c_4 - \sum_{i \in J} c_i d_{i4} &= 0 - (-3)\frac{1}{2} - 0\frac{1}{2} - 0 \cdot 1 = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Also wähle $r := 3$.

8.

$$\begin{gathered} \delta_1 = \frac{x_1^*}{d_{13}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \\ \delta_2 = \frac{x_5^*}{d_{53}} = \frac{4}{\frac{7}{2}} = \frac{8}{7} \\ \delta_3 = \frac{x_6^*}{d_{63}} = \frac{4}{2} = 2 \end{gathered}$$

Damit ist für $\nu = 5$ $\delta = \frac{8}{7}$ der minimale Wert.

9. $\overline{J} = (\{1,5,6\} \backslash \{5\}) \cup \{3\} = \{1,3,6\}$

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &:= 1 - \frac{8}{7}\frac{1}{2} = \frac{3}{7} \\ \overline{x}_2 &:= 0 \\ \overline{x}_3 &:= \frac{8}{7} \\ \overline{x}_4 &:= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_5 &:= 4 - \frac{8}{7}\frac{7}{2} = 4 - \frac{8}{2} = 0 \\
\overline{x}_6 &:= 4 - \frac{8}{7} \cdot 2 = \frac{12}{7}
\end{aligned}
$$

10. Sei $x^* = \left(\frac{3}{7}, 0, \frac{8}{7}, 0, 0, \frac{12}{7}\right)^T$ und $J = \{1, 3, 6\}$.

5. Sei $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$
\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

und

$$
L_0 B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
L_0 a^2 = \Lambda_0 B d_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{23} \\ d_{26} \end{pmatrix} \\
L_0 a^4 = \Lambda_0 B d_4 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{41} \\ d_{43} \\ d_{46} \end{pmatrix} \\
L_0 a^5 = \Lambda_0 B d_5 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{51} \\ d_{53} \\ d_{56} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
d_{21} = 0,\ d_{41} = -2,\ d_{51} = -\frac{1}{5} \\
d_{23} = 1,\ d_{43} = 5,\ d_{53} = \frac{2}{5} \\
d_{26} = 3,\ d_{46} = 1,\ d_{56} = 0
\end{aligned}
$$

7.

$$
c_2 - \sum_{i \in J} c_i d_{2i} \quad = \quad (-1) - (-3)0 - (-3)1 - 0 = 2
$$

$$\begin{aligned} c_4 - \sum_{i \in J} c_i d_{4i} &= 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 18 \\ c_5 - \sum_{i \in J} c_i d_{5i} &= 0 + 3\left(-\frac{1}{5}\right) + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Keiner dieser Werte ist kleiner als 0, damit lässt sich kein r finden.

Also ist $x^* = \left(\frac{3}{7}, 0, \frac{8}{7}, 0, 0, \frac{12}{7}\right)^T$ die Ecke mit der optimalen Lösung, also ist

$$z = -3 \cdot \frac{3}{7} - 3 \cdot 87 = -\frac{33}{7}$$

26.) (Hofmann nummeriert komisch...) Für das lineare Optimierungsproblem $c^T x \overset{!}{=} \min,\ Ax = b,\ x \geqslant 0,\ A \in R^{m \times n},\ m << n,\ Rang\ A = m\ (L)$ **werde das folgende (sog. duale) Problem betrachtet** $b^T y \overset{!}{=} \max,\ A^T y \leqslant c$**.** (D)

a.) Zeigen Sie: Ist x **zulässig für** (L)**,** y **zulässig für** (D)**, so gilt** $b^T y \leqslant c^T x$**. Weiter: Gilt sogar** $=$**, so ist** x **optimal für** (L) **und** y **optimal für** (D)**.**

Wegen

$$Ax = b$$

gilt also

$$\begin{aligned} b^T y \leqslant c^T x &\Leftrightarrow (Ax)^T y \leqslant c^T x \\ &\Leftrightarrow x^T A^T y \leqslant c^T x \end{aligned}$$

Aus $A^T y \leqslant c$ folgt

$$A^T y \leqslant c \quad \Leftrightarrow x^T A^T y \leqslant x^T c$$

und wegen $x^T c = c^T x$ gilt somit die ursprüngliche Behauptung

$$x^T a^T y \leqslant c^T x \quad \Leftrightarrow \quad b^T y \leqslant c^T x$$