18a.) Geben sei das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ -4x_1 & + & 8x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \end{array}$ **.**

Ermitteln sie die Matrizen L_k, bestätigen Sie die Gleichungen $A^{(k)} = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$k = 1$

mit $a_{kk} = a_{11} = 2$ ist

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

also ist

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$L_0 A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$k = 2$

mit $a_{kk} = a_{22} = -3$ ist

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{6}{-3} = -2$$

also ist

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$L_1 L_0 A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Insgesamt ist

$$
\begin{aligned}
L = \Lambda_0 \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
R = L_1 L_0 A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
L^{-1} = L_1 L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

damit ist

$$
c = L^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

Dies führt mit $Rx = c$ auf das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\
 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
 & & & & 2x_3 & = & 2
\end{array}
$$

Daraus folgt, daß $x_3 = 1$ ist, also ist $x_2 = 0$ und $x_1 = -2$. Damit löst der Vektor

$$
x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem:

$$
Ax = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = b
$$

18b.) Beweisen Sie die Aussage (5.15) im Skript.

Sei die Matrizenmultiplikation zweier $(n \times n)$ Matrizen (a_{ij}) und (b_{ij}) definiert als

$$
(c_{ij}) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}
$$

Beweis: Per Induktion über k.

Induktionsanfang $k = 1$
L_0 habe die folgende Form:

$$L_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & \cdots & 0 \\ x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(auf der Hauptdiagonalen liegen nur einsen, in der ersten Spalte beliebige Werte, ansonsten existieren nur Nullen) und L_1 die folgende:

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(auf der Hauptdiagonalen liegen nur Einsen, in der zweiten Spalte beliebige Werte, ansonsten existieren nur Nullen). Dann laßen sich die beiden Matrizen als Summe $L_0 = (a_{ij}) + E$ und $L_1 = (b_{ij}) + E$ ausdrücken, mit

$$(a_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad (b_{ij}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

damit gilt

$$(a_{ij})(b_{ij}) = 0$$

da für alle l gilt $b_l 1$=0, und somit $a_1 l \cdot b_l 1 = 0$ ergibt. Außerdem gilt für alle l $a_2 l = 0$, also auch $a_2 l \cdot bl2 = 0$. Für alle anderen Werte $j > 2$ gilt für alle l $b_l j = 0$, also ergibt die Summe dort auch immer 0.

Insgesamt gilt also:

$$L_0 \cdot L_1 \quad = \quad [(a_{ij}) + E][(b_{ij}) + E] = (a_{ij})(b_{ij}) + (a_{ij})E + (b_{ij})E + E^2 = (a_{ij}) + (b_{ij}) + E$$

Damit hat das Produkt $L_0 L_1$ untere Dreiecksgesalt:

$$L_0 L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & \cdots & 0 \\ x & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & y & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt $(k-1) \to k$

Nach Induktionsvorraussetzung hat die Matrix $(a_{ij}) = L_{k-1}$ untere Dreiecksform, auf der Hauptdiagonale liegen nur Einsen, darüber Nullen, ab der k-ten Spalte befinden sich nur Nullen unter der Hauptdiagonalen, davor befinden sich beliebige Werte.

$j > i$

$$j < i \wedge j < k \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x & \ddots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & \cdots & x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x & \cdots & x & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x & \cdots & x & 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & x & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$j < i \wedge j = k$ $\qquad$ $j < i \wedge j > k$ $\qquad$ $i = j$

Die Matrix $(b_{ij}) = \Lambda_k$ hat untere Dreiecksform, auf der Hauptdiagonale liegen nur Einsen, darüber Nullen, in der k-ten Spalte befinden sich beliebige Werte unter der Hauptdiagonalen, davor und dahinter stehen nur Nullen.

$j > i$

$j < i \wedge j < k$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$i = j$

$j < i \wedge j = k$ $\qquad$ $j < i \wedge j > k$

Damit ergeben sich bei der Berechnung von $L_k = (c_{ij})$ fünf Fälle:

$i = j$ An der Stelle $i = j = l$ ist $a_{il} = b_{lj} = 1$, für Werte von $l < j$ ist $b_{lj} = 0$, für Werte von $l > i$ ist $a_{il} = 0$. Damit ist die Summe $c_{ij} = 1$.

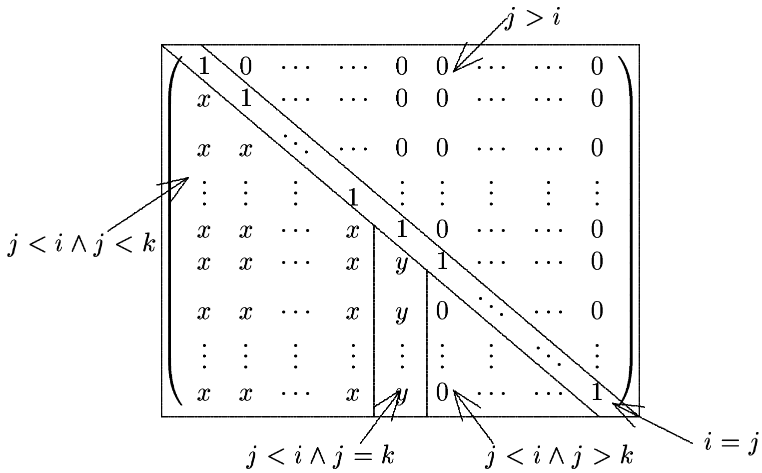
$j > i$ Für Werte von $l < j$ ist $b_{lj} = 0$, für Werte von $l > i$ ist $a_{il} = 0$. Damit ist die Summe $c_{ij} = 0$.

$j < i \wedge j < k$ Für Werte von $l < j$ ist $b_{lj} = 0$, an der Stelle $l = j$ ist $b_{lj} = 1$, für $l > j$ ist $b_{lj} = 0$. Damit ist die Summe $c_{ij} = a_{ij}$.

$j < i \wedge j > k$ Für Werte von $l < j$ ist $b_{lj} = 0$, für $l > k$ aber $a_{il} = 0$. Damit ist die Summe $c_{ij} = 0$

$j < i \wedge j = k$ Für Werte von $l < j$ ist $b_{lj} = 0$, an der Stelle $l = i$ ist $a_{il} = 1$, für $l > i$ ist $a_{il} = 0$. Damit ist die Summe $c_{ij} = b_{ij}$

Also hat die Matrix L_k untere Dreiecksgestalt:


$j > i$
$j < i \wedge j < k$
$j < i \wedge j = k$
$j < i \wedge j > k$
$i = j$