**16e.) Seien $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen von $P_n(x)$. Die Gewichte $g_{in}$ seien so bestimmt, daß für alle Polynome $p(x) \in \Pi_{n-1}$ gilt: $G_n(p) := \sum\limits_{i=1}^{n} g_{in} p(x_i) = \int\limits_{-1}^{1} p(x)dx$. Man zeige: Die Gauß-Quadraturformel $G_n(f)$ ist sogar für Polynome vom Höchstgrad $2n-1$ exakt.**

**Behauptung:**
Die Gauß-Quadraturformel $G_n(f)$ ist sogar für Polynome vom Höchstgrad $2n-1$ exakt.

**Beweis:**
Sei $f(x) \in \Pi_{2n-1}$. Dann gilt

$$\frac{f(x)}{P_n(x)} \quad = \quad q(x) \; Rest \; p(x)$$

Also läßt sich $f(x)$ als $q(x)P_n(x)+p(x)$ ausdrücken. Mit $P_n(x) \in \Pi_n$ folgt damit $p(x), q(x) \in \Pi_{n-1}$.

Aus $G_n(f) := \sum\limits_{i=1}^{n} g_{in} f(x_i) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ wird somit

$$\sum_{i=1}^{n} g_{in} \left[q(x_i)P_n(x_i) + p(x_i)\right] = \int_{-1}^{1} \left[q(x)P_n(x) + p(x)\right] dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} g_{in} q(x_i)P_n(x_i) + \sum_{i=1}^{n} g_{in} p(x_i) = \int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)dx + \int_{-1}^{1} p(x)dx$$

$x_1, \ldots, x_n$ sind die Nullstellen von $P_n(x)$ damit gilt

$$\sum_{i=1}^{n} g_{in} q(x_i)P_n(x_i) = \sum_{i=1}^{n} g_{in} q(x_i) 0 = 0$$

Zudem gilt nach Aufgabe d.):

$$\int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)dx = 0$$

Also gilt

$$\Leftrightarrow \quad 0 + \sum_{i=1}^{n} g_{in} p(x_i) = 0 + \int_{-1}^{1} p(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} g_{in} p(x_i) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$$

Wegen $p(x) \in \Pi_{n-1}$ hat $p(x)$ höchstens $n-1$ Nullstellen. Also läßt sich mindestens ein Gewicht $g_{in}$ finden, so daß die Gleichung erfüllt ist.
Damit läßt sich das Integral von $f(x) \in \Pi_{2n-1}$ durch $n$ Stützstellen bestimmen.
Damit ist die Quadraturformel für Polynome vom Höchstgrad $2n-1$ exakt.

q.e.d.