12.) Seien $[a,b] \subset I\!R$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ fest vorgegeben. Zu jeder Funktion $f : [a,b] \to I\!R$ sei p_f das Interpolationspolynom zu f und den Knoten $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Kann man zu jedem $C > 0$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion f angeben, so daß der maximale Interpolationsfehler $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - p_f(x)|$ größer als C ist?

Behauptung: Zu jedem C läßt sich eine Funktion f finden, die die Forderung erfüllt.
Beweis: Sei $p_f(x)$ die durch die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ interpolierte Funktion. Für jedes $0 \leqslant i \leqslant n$ gilt:

$$f(x_i) \quad = \quad p_f(x_i)$$

Für $n = \infty$ gilt $p_f(x) = f(x) \; \forall x \in [a,b]$.

Damit läßt sich keine Funktion f finden, so daß

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_f(x)| \quad > \quad C$$

gilt.

Für $n < \infty$ existieren jedoch unendlich viele Punkte zwischen x_i und x_{i+1}, insbesondere also auch ein $x_i < x^* < x_{i+1}$.

Definiert man nun die Funktion f so, daß sie durch $x_0, \ldots, x_n$ und zusätzlich x^* mit

$$f(x^*) \quad := \quad p_f(x^*) + 2C$$

interpoliert wird, so ist an dieser Stelle der Interpolationsfehler $2C$.

Damit existiert eine Funktion f, deren maximaler Interpolationsfehler größer ist als C. Da f ein (interpoliertes) Polynom ist, ist es beliebig oft differenzierbar.

q.e.d.